Ein mathematisches Phänomen

Axel Arne Guicking*, Thomas Renner†

Datum: 17. Januar 2001

Beschreibung

Im Folgenden soll eine interessante mathematische Entdeckung formal bewiesen werden. Es handelt sich dabei um die Tatsache, dass die Spaltensummen der Zweierpotenzen 2^n (für $n \geq 3$) jeweils 9 ergeben, wenn die Potenzen um eine Stelle versetzt untereinander stehen. Die Überträge werden wie bei herkömmlicher schriftlicher Addition berücksichtigt.
Folgende Übersicht verdeutlicht dies:

```
            3:    8
            4:    16
            5:     32
            6:      64
            7:      128
            8:       256
            9:        512
           10:        1024
           11:         2048
           12:          4096
           13:           8192
           14:           16384
           15:            32768
           16:             65536
           17:             131072
           18:              262144
           19:               524288
           20:               1048576
-------------------------------------
        Summe:    999999999999737856
```

*mail@guicking.de
†mail@thomasrenner.de

Beweis

In diesem Abschnitt wird die Behauptung bewiesen, dass die Anzahl der Neunen gegen $+\infty$ strebt.
Als erstes ein paar hilfreiche Definitionen:

1. Die **Zielfolge** a_n ist definiert als:

$$\begin{aligned} a_0 &:= 0 \\ a_n &:= 10 \cdot a_{n-1} + 9 \end{aligned} \tag{1}$$

   In geschlossener Form lautet dies:

$$a_n := 10^n - 1 \tag{2}$$

2. Die **Testfolge** b_n ist definiert als:

$$\begin{aligned} b_0 &:= 0 \\ b_n &:= 10 \cdot b_{n-1} + 2^{n+2} \end{aligned} \tag{3}$$

3. Die **Differenz** der Ziel- und der Testfolge c_n lautet damit:

$$c_n := a_n - b_n \tag{4}$$

4. Die **Anzahl der übereinstimmenden führenden Stellen** der Ziel- und der Testfolge d_n entspricht der Anzahl führender 9-Ziffern in der Testfolge:

$$d_n := |b_n| - |c_n| \tag{5}$$

Die zu zeigende Behauptung lässt sich damit wie folgt formulieren:

$$\lim_{n\to\infty} d_n \overset{!}{=} \infty \tag{6}$$

Für den Beweis von Gleichung 6 wird zuerst die folgende Eigenschaft von c_n gezeigt:

$$c_n = a_n - b_n \overset{!}{=} 2^n - 1 \tag{7}$$

Beweis von Gleichung 7 per Induktion:
Induktionsanfang ($n = 0$): $c_0 = a_0 - b_0 = 0 = 1 - 1 = 2^0 - 1$.
Induktionsvoraussetzung: Es sei für $n - 1$ gezeigt, dass gilt:

$$c_{n-1} = 2^{n-1} - 1 \tag{8}$$

Induktionsschluss ($n - 1 \longrightarrow n$):
Einsetzen der Definitionen 1 und 3 in Gleichung 4 und Auflösen liefert:

$$\begin{aligned} c_n &= a_n - b_n \\ &= (10 \cdot a_{n-1} + 9) - (10 \cdot b_{n-1} + 2^{n+2}) \\ &= 10 \cdot (a_{n-1} - b_{n-1}) + 9 - 2^{n+2} \\ &= 10 \cdot c_{n-1} + 9 - 2^{n+2} \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung 8 gilt:

$$c_n = 10 \cdot (2^{n-1} - 1) + 9 - 2^{n+2}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} c_n &= 5 \cdot 2^n - 10 + 9 - 4 \cdot 2^n \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung in Gleichung 7 gezeigt. $\square$

Nach Gleichung 4 gilt: $b_n = a_n - c_n$. Mit der gerade gezeigten Beziehung in Gleichung 7 ergibt sich daraus die folgende geschlossene Formel für die Testfolge b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= (10^n - 1) - (2^n - 1) \\ &= 10^n - 2^n \end{aligned} \tag{9}$$

Mit diesen Vorkenntnissen kann nun die Behauptung in Gleichung 6 gezeigt werden. Anwenden des Logarithmus zur Basis 10 liefert:

$$\begin{aligned} d_n &= |b_n| - |c_n| \\ &= \lceil \log b_n \rceil - \lceil \log c_n \rceil \end{aligned}$$

Einsetzen von Gleichungen 7 und 9 ergibt:

$$d_n = \lceil \log(10^n - 2^n) \rceil - \lceil \log(2^n - 1) \rceil \tag{10}$$

Als positiver Grenzwert ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} d_n &= \lim_{n\to\infty} \left\lceil \log\left(10^n\left(1 - \tfrac{1}{5^n}\right)\right) \right\rceil - \left\lceil \log\left(2^n\left(1 - \tfrac{1}{2^n}\right)\right) \right\rceil \\ &= \lim_{n\to\infty} \lceil \log 10^n \rceil - \lceil \log 2^n \rceil \end{aligned}$$

Zusammenfassen ergibt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} d_n &= \lim_{n\to\infty} \lceil n \cdot \log 10 \rceil - \lceil n \cdot \log 2 \rceil \\ &= \lim_{n\to\infty} n - \lceil n \cdot \log 2 \rceil \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} d_n &= \lim_{n\to\infty} \lfloor n - n \cdot \log 2 \rfloor \\ &= \lim_{n\to\infty} \lfloor n \cdot (1 - \log 2) \rfloor \\ &= \lim_{n\to\infty} \lfloor n \cdot \log 5 \rfloor = +\infty \end{aligned} \tag{11}$$

Damit ist die Behauptung in Gleichung 6 bewiesen und die Zahl der führenden Neunen strebt gegen $+\infty$. $\square$